2022考研数学一真题（完整版）

一、选择题

1.设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，则（　　）.

(A) $f(1)=0$　　(B) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$　　(C) $f'(1)=1$　　(D) $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$

2.设函数 $z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 $f(u)$ 可导，若 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy(\ln y-\ln x)$，则（　　）.

（A） $f(1)=\dfrac{1}{2}$，$f'(1)=0$　　（B） $f(1)=0$，$f'(1)=\dfrac{1}{2}$，

（C） $f(1)=\dfrac{1}{2}$，$f'(1)=1$　　（D） $f(1)=0$，$f'(1)=1$

3. 已知数列 $\{x_n\}$，其中 x_n 满足 $-\dfrac{\pi}{2}\le x_n\le\dfrac{\pi}{2}$，则（　　）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在

4.已知 $I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x$，$I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$，$I_3=\displaystyle\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，则（　　）.

（A） $I_1<I_2<I_3$　　（B） $I_2<I_1<I_3$　　(C) $I_1<I_3<I_2$　　(D) $I_3<I_2<I_1$

5.下列4个条件中，3阶矩阵 A 可以相似对角化的一个充分但不必要条件为（　　）.

（A）A有3个互不相等的特征值

（B）A有3个线性无关的特征向量

（C）A有3个两两线性无关的特征向量

（D）A的属于不同特征值的特征向量相互正交

6.设 A,B 为 n 阶矩阵，E 为单位矩阵，若方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则（　　）.

（A）方程组 $\begin{pmatrix}A & O\\ E & B\end{pmatrix}y=0$ 只有零解

（B）方程组 $\begin{pmatrix}E & A\\ O & AB\end{pmatrix}y=0$ 只有零解

（C）方程组 $\begin{pmatrix}A & B\\ O & B\end{pmatrix}y=0$ 与 $\begin{pmatrix}B & A\\ O & A\end{pmatrix}y=0$ 同解

（D）方程组 $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix} y=0$ 与 $\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix} y=0$ 同解

7.设 $\alpha_1=\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$，若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 等价，则λ的取值范围是（　　）

（A）$\{0,1\}$ （B）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq -2\}$

（C）$\{\lambda|\ \lambda\in R，\lambda\neq -1，\lambda\neq -2\}$ （D）$\{\lambda|\ \lambda\in R,\lambda\neq -1\}$

8.设 $X\sim U(0,3)$，$Y\sim\pi(2)$，$Cov(X,Y)=-1$，求 $D(2X-Y+1)=($　　$)$.

（A）1 （B）5

（C）9 （D）12

9.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且 X_1 的4阶矩阵存在，

记 $\mu_k=E(X_1^k)(k=1,2,3,4)$ $E(X_i^k)=\mu_k$，则由切比雪夫不等式，对任意 $\varepsilon>0$，有 $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu_i\right|\geq\varepsilon\right\}\leq($　　$)$.

（A）$\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$ (B) $\frac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon}$ （C）$\frac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$ （D）$\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon}$

10.设 $X\sim N(0,1)$，在 $X=x$ 的条件下 $Y\sim N(X,1)$，则 $\rho_{XY}=($　　$)$.

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

11.函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在点 $(0,1)$ 处的最大方向导数是__________.

12.$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=$__________.

13.当 $x\geq 0,y\geq 0$ 时，$x^2+y^2\leq ke^{x+y}$ 恒成立，求 k 的取值范围是__________.

14.已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^{-nx}$ 的收敛域为 $(a,+\infty)$，则 $a=$__________.

15.已知矩阵 A 和 $E-A$ 可逆，其中 E 为单位矩阵，若矩阵 B 满足 $\left[E-(E-A)^{-1}\right]B=A$，则 $B-A=$__________.

16.设 A,B,C 为三个随机事件，A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容，B 与 C 相互独立，且

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$,则$P(B\cup C|A\cup B\cup C)=$__________.

三、解答题

17.设函数$y=y(x)$是微分方程$y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$的满足$y(1)=3$的解，求曲线$y=y(x)$的渐近线.

18.已知平面区域$D=\left\{(x,y)\middle|y-2\le x\le\sqrt{4-y^2},0\le y\le 2\right\}$，计算$I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$.

19.设$\sum:4x^2+y^2+z^2=1,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0$，取其上侧，$\Gamma$是$\sum$的边界，其正向与$\sum$的正法向量满足右手法则，计算曲线积分$I=\int_\Gamma\left(yz^2-\cos z\right)dx+2xz^2dy+\left(2xyz+x\sin z\right)dz$.

20.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导数，证明：$f''(x)\ge 0$的充要条件是对不同的实数a,b，有$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

21.已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}ijx_ix_j$.

（1）求二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵;

（2）求正交矩阵Q，使正交变换$X=QY$化二次型$f(x_1,x_2,x_3)$为标准型;

（3）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

22.设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自期望为θ的指数分布总体的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$是来自期望为2θ的指数分布总体的简单随机样本，且两样本相互独立，其中$\theta(\theta>0)$是未知参数，利用样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$，求θ的极大似然估计量$\hat{\theta}$，并求$D(\hat{\theta})$.