

2022 考研数学二真题 (完整版)

一、选择题

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 是非零无穷小量, 则以下命题:

- ① 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$;
 ② 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;
 ③ 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\alpha(x) - \beta(x) \sim o(\alpha(x))$;
 ④ 若 $\alpha(x) - \beta(x) \sim o(\alpha(x))$, 则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,

真命题的序号是 ().

- (A) ①② (B) ①④ (C) ①③④ (D) ②③④

2. $\int_0^2 dy \int_0^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dx = ().$

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 2 阶导数, 则 ().

- (A) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时, $f'(x) > 0$
 (B) 当 $f'(x) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加
 (C) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时, $f''(x_0) > 0$
 (D) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数

4. 已知 $f(x)$ 连续, 令 $F(x, y) = \int_0^{x-y} (x-y-t)f(t)dt$, 则 ().

- (A) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ (B) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$
 (C) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ (D) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

5. 设 p 为常数, 若反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}} dx$ 收敛, 则 p 的取值范围是 ().

- (A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, 2)$ (C) $(-\infty, 1)$ (D) $(-\infty, 2)$

6. 已知数列 $\{x_n\}$, 其中 x_n 满足 $-\frac{\pi}{2} \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$, 则 ().

- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在

7. $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)} dx$, $I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x} dx$, $I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x} dx$, 则 ().

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_2 < I_1 < I_3$ (C) $I_1 < I_3 < I_2$ (D) $I_3 < I_2 < I_1$

8. 设 A 为 3 阶矩阵, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, A 的特征值为 1, -1, 0 的充要条件是 ().

- (A) 存在可逆矩阵 P, Q , 使 $A = P\Lambda Q$
 (B) 存在可逆矩阵 P , 使 $A = P\Lambda P^{-1}$
 (C) 存在正交矩阵 Q , 使 $A = Q\Lambda Q^{-1}$
 (D) 存在可逆矩阵 P , 使 $A = P\Lambda P^T$

9. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, 则 $Ax = b$ 的解的情况为 ().

- (A) 无解 (B) 有解
 (C) 有无穷多解或无解 (D) 有唯一解或无解

10. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价, 则 λ 的取值范围是 ().

- (A) $\{0, 1\}$ (B) $\{\lambda | \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -2\}$
 (C) $\{\lambda | \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$ (D) $\{\lambda | \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1\}$

二、填空题

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\cot x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+xy+y^3=3$ 确定, 则 $y''(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 微分方程 $y''' - 2y'' + 5y' = 0$ 的通解 $y(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知曲线 L 的极坐标方程为 $r = \sin 3\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right)$, 则 L 围成有界区域的面积为_____.

16. 设 A 为 3 阶矩阵, 交换 A 的第 2 行和第 3 行, 再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列, 得到矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A^{-1} \text{ 的迹 } \text{tr}(A^{-1}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、解答题

17. 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin x)}{x^2} = 2$, 求 $f'(1)$.

18. 设 $y(x)$ 是微分方程 $2xy^2 - 4y < 2 \ln x - 1$ 满足 $y(1) = \frac{1}{4}$ 的解, 求曲线 $y = y(x) (1 \leq x \leq e)$ 的弧长.

19. 设 $D = \{(x, y) | y - 2 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$, 计算 $I = \iint_D \frac{(x - y)^2}{x^2 + y^2} dx dy$.

20. 已知可微函数 $f(u, v)$ 满足 $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = 2(u - v)e^{-(u+v)}$, 且 $f(u, 0) = u^2 e^{-u}$.

(1) 记 $g(x) = f(x, y - x)$, 求 $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$;

(2) 求 $f(u, v)$ 的表达式和极值.

21. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶连续导数, 证明: $f''(x) \geq 0$ 的充要条件是对不同的实数

a, b , 有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

22. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$.

(1) 求正交变换 $X = QY$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准型;

(2) 证明: $\lim_{x \neq 0} \frac{f(x)}{x^T x} = 2$.