

## 2022 考研数学三真题 (完整版)

### 一、选择题

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x), \beta(x)$  是非零无穷小量, 则以下命题:

- ① 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则  $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$ ;
- ② 若  $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$ , 则  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ;
- ③ 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则  $\alpha(x) - \beta(x) \sim o(\alpha(x))$ ;
- ④ 若  $\alpha(x) - \beta(x) \sim o(\alpha(x))$ , 则  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ,

其中正确命题的序号是 ( ).

- (A) ①②      (B) ①④      (C) ①③④      (D) ②③④

2. 已知  $a_n = \sqrt[n]{n} - \frac{(-1)^n}{n} (n=1, 2, \dots)$ , 则  $\{a_n\}$  ( ).

- (A) 有最大值, 有最小值      (B) 有最大值, 没有最小值  
(C) 没有最大值, 有最小值      (D) 没有最大值, 没有最小值

3. 已知  $f(x)$  连续, 令  $F(x, y) = \int_0^{x-y} (x-y-t)f(t)dt$ , 则 ( ).

- (A)  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$       (B)  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$   
(C)  $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$       (D)  $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

4. 已知  $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)} dx, I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x} dx, I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x} dx$ , 则 ( ).

- (A)  $I_1 < I_2 < I_3$       (B)  $I_2 < I_1 < I_3$       (C)  $I_1 < I_3 < I_2$       (D)  $I_3 < I_2 < I_1$

5. 设  $A$  为 3 阶矩阵,  $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A$  的特征值为 1, -1, 0 的充要条件是 ( ).

- (A) 存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使  $A = P\Lambda Q$   
(B) 存在可逆矩阵  $P$ , 使  $A = P\Lambda P^{-1}$   
(C) 存在正交矩阵  $Q$ , 使  $A = Q\Lambda Q^{-1}$   
(D) 存在可逆矩阵  $P$ , 使  $A = P\Lambda P^T$

6. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ , 则  $Ax = b$  的解的情况为 ( ).

- (A) 无解 (B) 有解  
(C) 有无穷多解或无解 (D) 有唯一解或无解

7. 设  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ , 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  等价, 则  $\lambda$  的取值范围是

- ( ).  
(A)  $\{0, 1\}$  (B)  $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -2\}$   
(C)  $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$  (D)  $\{\lambda | \lambda \in R, \lambda \neq -1\}$

8. 设随机变量  $X \sim N(0, 4)$ , 随机变量  $Y \sim B\left(3, \frac{1}{3}\right)$ , 且  $X, Y$  不相关, 则  $D(X - 3Y + 1) = ( )$ .

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 10

9. 设随机变量序列  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  独立同分布, 且  $X_i$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

则当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$  依概率收敛于 ( ).

- (A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{1}{6}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{1}{2}$

10. 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布为

X \ Y	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件  $\{\max\{X, Y\} = 2\}$  与事件  $\{\max\{X, Y\} = 1\}$  相互独立, 则  $Cov(X, Y) = ( )$ .

- (A) -0.6 (B) -0.36 (C) 0 (D) 0.48

## 二、填空题

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + e^x}{2} \right)^{\cot x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12.  $\int_0^2 \frac{2x - 4}{x^2 + 2x + 4} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 已知函数  $f(x) = e^{\sin x} + e^{-\sin x}$ , 则  $f''(2\pi) =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 则  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(y-x)dy =$  \_\_\_\_\_.

15. 设  $A$  为 3 阶矩阵, 交换  $A$  的第 2 行和第 3 行, 再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列, 得到矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } A^{-1} \text{ 的迹 } \text{tr}(A^{-1}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

16. 设  $A, B, C$  为三个随机事件,  $A$  与  $B$  互不相容,  $A$  与  $C$  互不相容,  $B$  与  $C$  相互独立, 且  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$ , 则  $P(B \cup C | A \cup B \cup C) =$  \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17. 设函数  $y = y(x)$  是微分方程  $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$  的满足  $y(1) = 3$  的解, 求曲线  $y = y(x)$  的渐近线.

18. 设某产品的产量  $Q$  由资本投入量  $x$  和劳动投入量  $y$  决定. 生产函数  $Q = 12x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{6}}$ . 该产品的销售单价  $P$  与  $Q$  关系为  $P = 1160 - 1.5Q$ . 若单位资本投入和单位劳动投入的价格分别为 6 和 8, 求利润最大时的产量.

19. 已知平面区域  $D = \{(x, y) | y - 2 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$ , 计算  $I = \iint_D \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2} dx dy$ .

20. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n + 1}{4^n(2n+1)} x^{2n}$  的收敛值及和函数  $S(x)$ .

21. 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$ .

(1) 求正交变换  $X = QY$  将  $f(x_1, x_2, x_3)$  化为标准型;

(2) 证明:  $\lim_{x \neq 0} \frac{f(x)}{x^T x} = 2$ .